

2025 是個完美平方數 - 兼介紹二十世紀最偉大的數學家 唐望

今年是西元 2025 年，2025 這個數字有許多不尋常之處，讓我們來探討一下其中之奧妙。

首先 2025 是個完美平方數 (perfect square)，因為它是整數 45 的平方； $2025=(45)^2$ 。換句話說過去二千多年來，從西元元年開始到 4 年，再到 9 年、16 年...等，只有 44 個有這類性質的年份，上一次是 1936 年，1936 是 44 的平方，可惜那時我還沒有出生，無緣親身體驗當時的狀況。而下一次則是 2116 是 46 的平方，我也不可能慶祝那個新年，還是把握現在，看看當下，2025 這數字還有那些其它奧妙之處。

2025 是 1 到 89 這 89 個數字的全部加起來的和：

$$2025 = 1+2+3+4+5+\dots\dots\dots+87+88+89$$

2025 是兩個整數，5 和 9 的平方積：

$$\begin{aligned} 2025 &= (1+3+5+7+9) \times (1+3+5+7+9+11+13+15+17) \\ &= (1+3+5+7+9) \times ((1+7+17)+(3+9+15)+(5+11+13)) \\ &= (1+3+5+7+9) \times (25+27+29) \\ &= 25 \times 81 \\ &= 5^2 \times 9^2 \end{aligned}$$

2025 是三個整數，40/20/5 的平方和：

$$2025 = 40^2 + 20^2 + 5^2$$

2025 是 1 到 9 這九個數字的全部加起來的平方：

$$2025 = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2$$

2025 是 1 到 9 這九個數字的立方（三次方）和：

$$2025 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$

綜觀以上五個不尋常的特性，難道不會覺得 2025 年將是一個前無古人、後無來者的一年嗎？

以上這些數字的演算，在數學領域中屬於數論(Number theory)的領域，主要研究整數(Integer)的性質，被稱為「最純」的數學領域。而數論中最基本的一個定理就是畢氏定理：在平面上的一個直角三角形中，兩個直角邊邊長平方加起來，等於斜邊長的平方。如果兩個直角邊長分別是 a 和 b，斜邊長度是 c，那麼數學表示則是：

$$a^2 + b^2 = c^2$$

這裡 (a, b, c) 被稱為畢氏三元數。公元前 1600 年古埃及的紙莎草就有記載 (3, 4, 5) 這一組畢氏三元數。

而更早古巴比倫 Plimpton 322 泥版也曾紀錄當時已知最大的一組畢氏三元數 (12709, 13500, 18541)。在那個沒有計算機、也沒有算盤的年代，很難想像這組數字是如

何推算出來的。即使到今天，我也只能用計算機來確認，這真是一組畢氏三元數，但是如何找出來則完全無釐頭。

一百多年前，有一個印度人就有這個種超級運算能力，有人推崇他為二十世紀最偉大的數學家，我完全同意，讓我們來看看他的故事。

這個印度人叫斯里尼瓦瑟·拉馬努金(Srinivasa Ramanujan)，1887年12月22日出生在英屬印度，他的數學天賦在中學時期開始顯露，尤其在無窮級數方面的掌握，遠遠超過其他同學、甚至老師們所能理解的程度。

先介紹拉馬努金最出名的一件軼事。有一次他在倫敦病重，他的同僚哈代搭計程車來看他，哈代注意到計程車車牌號碼是1729，於是就不經意的對他說：「我來時計程車的號碼是1729，這數字太沒趣了，希望不是不祥之兆。」拉馬努金立刻回答說：「這個數字很特別，它是兩組數字的立方和，而且是其中最小的一個。換句話說就是 $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ 。

這類的數字之後被歸類為計程車數(Taxicab Number)，第 n 個計程車數寫作 $Ta(n)$ 。其定義為最小的數能以 n 個不同的方法表示成兩個數字的立方和。到目前為止，找到的已知的前六個計程車數如下：

$$\begin{aligned} Ta(1) &= 2 \\ &= 1^3 + 1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ta(2) &= 1729 \\ &= 1^3 + 12^3 \\ &= 9^3 + 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ta(3) &= 87539319 \\ &= 167^3 + 436^3 \\ &= 228^3 + 423^3 \\ &= 255^3 + 414^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ta(4) &= 6963472309248 \\ &= 2421^3 + 19083^3 \\ &= 5436^3 + 18948^3 \\ &= 10200^3 + 18072^3 \\ &= 13322^3 + 16630^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ta(5) &= 48988659276962496 \\ &= 38787^3 + 365757^3 \\ &= 107839^3 + 362753^3 \\ &= 205292^3 + 342952^3 \\ &= 221424^3 + 336588^3 \\ &= 231518^3 + 331954^3 \end{aligned}$$

$$Ta(6) = 24153319581254312065344$$

$$\begin{aligned}
&= 582162^3 + 28906206^3 \\
&= 3064173^3 + 28894803^3 \\
&= 8519281^3 + 28657487^3 \\
&= 16218068^3 + 27093208^3 \\
&= 17492496^3 + 26590452^3 \\
&= 18289922^3 + 26224366^3
\end{aligned}$$

除了 Ta(1) 和 Ta(2) 之外，其它四個計程車數都是後來用電腦找出來的。而且 Ta(6) 這個有 23 位的數字，並不是百分之百確定，而是機會大於 99%。主要是因為 Ta(6) 這個數字太大，目前電腦的速度不夠快，無法排除所有比 Ta(6) 還要小的數字，因而只有 99% 的把握，有 1% 的可能性日後會找到比它小的數字。而 Ta(7) 以上的數字亦同，找到的值都只能說是“最小的上限(upper bound)”。

拉馬努金雖出身於最高的種姓「婆羅門」，奉行絕對的素食主義，家境卻相當貧窮，全家只靠父親每個月 20 盧比的工資過活。十歲時家中住進了兩個大學生房客，教他一些基本的數學，萬沒想到他一教就會，而且把一本很深的《平面三角學》所有的習題全部做完。十二歲時，他就用自己獨特的方法，證明出數學界最重要的一個公式：歐拉公式 (Euler's Formula)。

歐拉公式如是說：對任何實數 x 而言，這個公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 存在，其中 e 是自然對數的底數， i 是虛數單位，而 $\cos$ 和 $\sin$ 則是餘弦、正弦對應的三角函數，參數 x 則以弧度 (radian) 為單位。(註：看不懂這段文字的看官別懊惱，你和 99% 的讀者是同一國的。)

進入高中後，拉馬努金有一次在圖書館借到英國數學家卡爾 (G. S. Carr) 的《純粹及應數學基本成果概要》(Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics) 這本書，看書名就知道這是一本數學方面集古今中外之大成的百科全書。這本書收錄了代數、微積分、三角學和解析幾何五千多個方程式，但大都沒有證明。於是拉馬努金把一條一條的方程式，仔細的研究，並且用他自己方法去證明，之後再把它們記載在他的筆記本中。這個工作一共花了五年的時間才完成，留下了好幾百頁手寫的筆記本。

1903 年獲得獎學金去馬德拉斯大學 (University of Madras) 求學，然而由於他只專注數學方面的課程，完全不管其他，連續兩個學期五門文科都不及格，因此一年後遭到退學的命運。然而他仍不改其志，持續堅持對數學領域的追求。

1909 年 7 月 14 日，拉馬努金和十歲的女子 Janaki 結婚，這段婚姻是他的母親一年前就安排好的。按照印度習俗，婚後新娘仍然留在娘家，一直到她進入青春期的 (puberty) 之後，才和拉馬努金的母親一起搬到馬努金在 Madras 的住所。

婚後，拉馬努金經過朋友介紹，認識了一位富商叫拉奧 (R. Rao)，也是一位數學的愛好者，非常欣賞拉馬努金的才華，於是每個月提供一筆生活費，讓他可以專心在家從事數學研究。

1911 年，拉馬努金在《印度數學學會》發表第一篇論文“關於伯努利數的一些性質”，受到同行的注意。第二篇則是提出一系列共 14 條關於圓周率 π 的計算公式，其中最受人重視的一條，是只要算一項，就可以達到八位數(十進位)的精度。

拉馬努金也曾經在這個專業雜誌，徵求以下這個數學式子的答案：

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots}}}$$

經過六個月之後，由於沒有接到任何回覆，於是就自己提供一個很長的方程式，但沒有證明這個問題的答案是3。(註：如有看官能夠用紙和筆確認3是正確答案的話，請用電郵和筆者連絡，哇強哩加奔。)

在印度數學界小有名氣之後，拉馬努金有了一個到英國去鍍金的念頭，畢竟在印度已經沒有任何人可以和他在數學方面一起切磋、進步。於是拉馬努金寫了三封信，分別寄給三位在劍橋大學的三位教授，前兩位收信後立刻退回。第三位是哈定，他原本回信的動機是想指正拉馬努金的錯誤，後來和劍橋大學其他的同僚仔細研究拉馬努金寄來九頁的信之後，才發現他是百年難得一見的奇才，於是正式發函邀請拉馬努金到劍橋大學遊學。同時在還沒有收到回覆之前，就直接向印度辦公室 (India Office) 申請從印度到英國所需要的文件。

拉馬努金收到邀請函之後，也沒有怠慢，立刻申請所需的文件，並且搭乘 1914 年 3 月 17 日從 Madras 出發的船 S. S. Nevada，在 4 月 14 日抵達倫敦。這時哈定已經組織好一個小團隊，和拉馬努金一起探討已經完成的成果。

很巧的是第一次世界大戰 (1914 - 1918) 剛好在這年開打，雖然英國位屬歐洲的邊緣地帶，但是鄰國在拼你死我活的情況下，英國人民生活或多或少受到影響。拉馬努金由於飲食有特殊需求，必須自己在家煮食物，也因此常常忘記吃飯，身體狀況是每況愈下。到後期發現他患了肺結核病，由於當沒有抗生素，使得這種病非常難醫治。

這兩位由於文化和教育背景有極大的差異。哈定是個無神論者，數學研究要有合理的證明，然而拉馬努金是虔誠的印度教徒，尊行教義，終生過著婆羅門的生活。深知上天有神，所有的神靈都是一體的，知識包括他所知的方程式，都是來上天的神，根本無需證明。

即使如此，拉馬努金和哈定還是在一起相處的五年期間，共同發表了 28 篇論文。因為在數學方面的成就，拉馬努金在 31 歲時就獲得英國皇家學會會院士，這是一項了不起的成就。拉馬努金在 1919 年返回印度，隔年因病去世，得年 32 歲。他的妻子 Janaki 在他死後搬到孟買，1950 年回到老家清奈生活，直到 1994 年逝世，享耆壽 95 歲。

最後再談拉馬努金死後的一段故事。1920 年他離開人間之後，妻子 Janaki 把他生前最後一年的筆記本寄給英國劍橋大學的哈定，之後經過幾手就無影無踪、不知去向。直到 1976 年，一位美國數學家安德魯 (George Andrews) 在劍橋大學三一學院圖書館的一個角落找它的下落，這是拉馬努金生命最後一年嘔心瀝血的遺作，以《Lost Notebook (失散的筆記本)》為書名在 1987 年出版時，印度前總理甘地 (R. Gandhi) 親自到他的故鄉馬德拉斯參加「首發典禮」。有人把這本書重出江湖一事，視為有如發現貝多芬全本「第十交響樂」，但是是否真的如此，且讓我們拭目以待。

印度人把他和聖雄甘地 (M. Gandhi) 和詩人泰戈爾 (R. Tagore)，合併稱為「印度之子」。印度總理辛格 (M. Singh) 在 2012 年 2 月 26 日宣布其誕辰 (每年 12 月 22 日) 成為「印度數學日」及 2012 年為「印度數學年」，由此可見印度人對他的尊敬和推崇。稱他為二十世紀最偉大的數學家實不為過。

後記：

在拉馬努金寫給哈定的第二封信中（日期為 1913 年 2 月 27 日）

「親愛的先生，我很感激地讀到你 1913 年 2 月 8 日的信。我等待您的答覆，類似於一個倫敦的數學教授寫信要我仔細研究布羅米奇的「無窮級數」而不要陷入發散級數的陷阱。……我告訴他，在我的理論中一個無窮數列 $1+2+3+4+5+6+\dots = -1/12$ 。如果我告訴你這個，你肯定會勸我進精神病收容院。我向你細說此事只是使你相信，如果我暗示我只在一封信中所寫的行數，你不可能找出我證明的方法。」

拉馬努金的證明其實很簡單，只要初中代數就可以瞭解。其方法如下：首先定出要找的答案 S 是 $S = 1+2+3+4+5+\dots$

假設 $S_1 = 1-1+1-1+1+\dots$

以及 $S_2 = 1-2+3-4+5+\dots$

因為 $1 - S_1$

$$= 1 - (1-1+1-1+\dots)$$

$$= S_1$$

所以 $S_1 = 1/2$

再看 $S_2 + S_2$

$$= 1-2+3-4+5+\dots + 1-2+3-4+5+\dots$$

$$= 1-2+3-4+5-6+\dots$$

$$= 1-1+1-1+1-1+\dots$$

$$= S_1$$

因此 $S_2 + S_2 = S_1 = 1/2$

也因此 S_2 等於 $1/4$

再看 $S - S_2$

$$= 1+2+3+4+5+6+7+\dots - 1-2+3-4+5-6+7$$

$$= 0+4+0+8+0+12+0+\dots$$

$$= 4(1+2+3+4+5+\dots) = 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

$$= 4S$$

由此可證 $S = -1/12$ QED